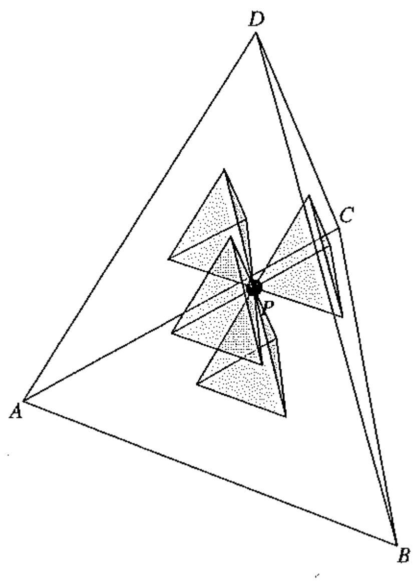
Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine
Prova alternativa di matematica Tema B
11 settembre 2014

Esercizio 1. Sia $ABCD$ un tetraedro di volume V, e sia P un suo punto interno. Tracciamo per P quattro piani, ognuno parallelo a una delle facce del tetraedro. Questi piani individuano quattro altri piccoli tetraedri, aventi un vertice in P e la faccia opposta che giace su una faccia del tetraedro originale (vedi la figura). Per ognuna dei triangoli BCD, ACD, ABD e ABC, siano rispettivamente S_1, S_2, S_3, S_4 la sua area, d_1, d_2, d_3, d_4 la distanze di P dal triangolo, e V_1, V_2, V_3, V_4 il volume del nuovo piccolo tetraedro una cui faccia è contenuta nel triangolo. Dimostrare che

$$V = \frac{S_1 d_1 + S_2 d_2 + S_3 d_3 + S_4 d_4}{3}, \quad \frac{S_i d_i}{3} = V \cdot \sqrt[3]{\frac{V_i}{V}} \quad \text{per } i = 1, \dots, 4,$$
$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}.$$



Esercizio 2. Trovare delle costanti A, B, C tali che per ogni intero $n > 1$ valga

$$\frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1))} = A + \frac{B}{2n-1} + \frac{C}{2n+1}.$$