

Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine
Prova di ammissione di Matematica Tema A

11 settembre 2014

Esercizio 1. Si consideri la funzione di variabile reale $f(x) = x/(x^2 + 1)$. Se ne disegni un grafico approssimativo. Sia x_0 un numero reale. Poniamo $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \dots$. Si discuta il comportamento della successione così ottenuta. Supponiamo che x_0 sia un numero intero. Dimostrare che x_1, x_2, \dots sono numeri razionali i cui denominatori (dopo aver ridotto ai minimi termini) formano una successione crescente.

Esercizio 2. Dimostrare che ogni numero razionale del tipo $m/10$, dove m è un numero intero, si può scrivere, in modo unico, nella forma

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{5} + n,$$

dove $a \in \{0, 1\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ed n è un numero intero (positivo o negativo). Invece ogni numero del tipo $m/100$ si decompone come

$$\frac{a}{a} + \frac{a'}{2} + \frac{b}{25} + \frac{b'}{5} + n,$$

dove $a, a' \in \{0, 1\}$, $b, b' \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ed n è come prima. Esprimere in tal modo $17/100$. Come pensate si possa generalizzare?

Esercizio 3. Indagare per quali interi n è vera la disuguaglianza

$$n! \cdot \frac{n}{n-1} \leq 1! + 2! + 3! + \dots + n! \leq n! \cdot \frac{n}{n-2}.$$

Esercizio 4. Un quadrato magico di ordine 3 è una tabella con 3 righe e tre colonne, contenente ognuna un numero intero positivo, e tale che le somme dei numeri su ciascuna riga, ciascuna colonna e ciascuna diagonale dà sempre lo stesso risultato. Per esempio nel seguente quadrato le somme valgono sempre 15:

$$Q_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 7 & 6 \\ \hline 9 & 5 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 8 \\ \hline \end{array}$$