

**Prova di Matematica A**  
**Concorso di Ammissione alla Scuola Superiore**  
**Settembre 2016**

Il candidato svolga la seguente dissertazione e risolva il maggior numero possibile di esercizi.

**Dissertazione.** *Fattorizzazione nell'ambito dei numeri interi e dei polinomi.*

Il candidato presenti concetti e risultati fondamentali nelle due teorie, con particolare riferimento alla questione della primalità (o irriducibilità), mostrando le analogie formali tra le due teorie.

**Esercizio 1**

Pierino deve indovinare il polinomio scritto dalla maestra sul retro della lavagna. Si tratta di un polinomio a coefficienti interi non-negativi. Pierino ha soltanto il diritto di chiedere alla maestra il valore del polinomio in numeri interi. Quante domande come minimo dovrà porre Pierino per indovinare sicuramente il polinomio? Spiegare in dettaglio la strategia ottimale.

**Esercizio 2**

Un triangolo è incuneato tra due dischi disgiunti fissati nel piano. Risulta pertanto che un suo lato sia tangente al primo disco, un altro lato tangente al secondo disco. È possibile muoverlo mantenendo tale vincolo di tangenza? Se sì, quanti gradi di libertà ammette il cuneo? [Il candidato cerchi di formalizzare il concetto di *grado di libertà*, anche con esempi diversi da quello in esame, ed argomenti la soluzione del problema specifico].

**Esercizio 3**

Sia  $N$  un numero intero,  $N \geq 2$ . Assegnata la ennupla di numeri reali  $\{f_i\}_{i=1}^N$ , con  $f_i > 0$  per ogni  $i = 1, \dots, N$ , i numeri reali incogniti  $\{y_i\}_{i=1}^N$  sono tali che

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = -f_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

dove  $y_0 = 0$  e  $y_{N+1} = 0$ . Dimostrare che  $y_i > 0$  per ogni  $i = 1, \dots, N$ . Il risultato vale anche se  $f_i \geq 0$  per ogni  $i = 1, \dots, N$ , con  $(f_1, \dots, f_N) \neq (0, \dots, 0)$ ?

#### Esercizio 4

Data una rotazione del piano  $R$ , di centro l'origine, consideriamo la successione di rotazioni  $R, R^2 = R \circ R, (R^2)^2, \dots, R^{2^n}, \dots$ . Mostrare che possono verificarsi esattamente tre casi: (1) le rotazioni della successione sono a due a due distinte; (2) ad un certo punto si riottiene la rotazione  $R$  e poi la successione si ripete; (3) ad un certo punto si entra in un ciclo, senza mai però ottenere la rotazione iniziale  $R$ . Esibire un esempio in cui la successione è del tipo  $R, R^2, R^4, R^8, R^2, R^4, R^8, \dots$  con  $R \neq R^2$ .